

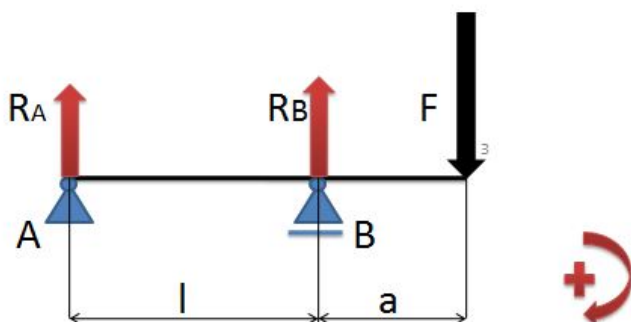
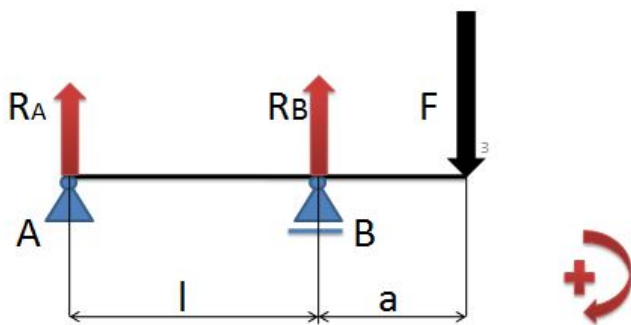
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Číslo projektu	CZ .1 .07/1.1 .36/02.0066
Autor	Pavel Florík
Předmět	Mechanika
Téma	Výpočet reakčních sil
Metodický pokyn	výkladový text s ukázkami

Rovnováha sil na nosníku

Příklad č .1

Vypočti reakční síly v uložení podle obrázku, je - li $F = 1500 \text{ N}$ a rozměry nosníku jsou : $l = 1000 \text{ mm}$, $a = 300 \text{ mm}$. Dále zjisti, jak se bude měnit jejich velikost v závislosti na změně zatížení v rozmezí od $F = 100 \text{ N}$ až $F = 6000 \text{ N}$, při stávajících rozměrech nosníku.



Sestavíme si obecné rovnice rovnováhy :

$$\text{Rovnice rovnováhy : } \sum F_Y = 0 ; R_A - R_B + F = 0$$

$$\sum M_B = 0 ; R_A \cdot l + F \cdot a = 0$$

Solve[$R_A + R_B - F == 0$, R_A]

{ { $R_A \rightarrow F - R_B$ } }

Solve[{ $R_A + R_B - F == 0$, $R_A l + F a == 0$ }, { R_B , R_A }]

{ { $R_B \rightarrow F + \frac{a F}{l}$, $R_A \rightarrow -\frac{a F}{l}$ } }

Výsledné reakční síly:

{ { $R_B \rightarrow 1950 \text{ N}$, $R_A \rightarrow -450 \text{ N}$ } }

{ { $R_B \rightarrow 1950 \text{ N}$, $R_A \rightarrow -450 \text{ N}$ } }

clearAll [l , a , F]

$l = 1000 \text{ mm}$; $a = 300 \text{ mm}$; $F = 1500 \text{ N}$

clearAll[l , a , F]

1500 N

$l = 1000$

1000

$a = 300$

300

Nyní se podíváme, jak se budou měnit velikosti reakčních sil, v závislosti na změně zatížení, měnícího se v rozsahu:

$F = 0$ až 6000 N v krocích po 300 N. Rozměry nosníku zůstávají zachovány. Tabulka ukazuje růst zatížení. / jednotky sil Newtony- N nutno psát jako " n " ! Velké" N " nefunguje, počítač si s ním neporadí.

$l = 1000$; $a = 300$; ftab = Table[n, {n, 0, 6000, 300}]

{0, 300, 600, 900, 1200, 1500, 1800, 2100, 2400, 2700,

3000, 3300, 3600, 3900, 4200, 4500, 4800, 5100, 5400, 5700, 6000}

Takto sestavíme rovnice pro každé zatížení zvlášť:

```

rovnice = Table[{F, {RA + RB - F == 0, RA 1 + F a == 0}}, {F, ftab}]
{{0, {RA + RB == 0, 1000 RA == 0}}, {300, {-300 + RA + RB == 0, 90 000 + 1000 RA == 0}},
{600, {-600 + RA + RB == 0, 180 000 + 1000 RA == 0}},
{900, {-900 + RA + RB == 0, 270 000 + 1000 RA == 0}},
{1200, {-1200 + RA + RB == 0, 360 000 + 1000 RA == 0}},
{1500, {-1500 + RA + RB == 0, 450 000 + 1000 RA == 0}},
{1800, {-1800 + RA + RB == 0, 540 000 + 1000 RA == 0}},
{2100, {-2100 + RA + RB == 0, 630 000 + 1000 RA == 0}},
{2400, {-2400 + RA + RB == 0, 720 000 + 1000 RA == 0}},
{2700, {-2700 + RA + RB == 0, 810 000 + 1000 RA == 0}},
{3000, {-3000 + RA + RB == 0, 900 000 + 1000 RA == 0}},
{3300, {-3300 + RA + RB == 0, 990 000 + 1000 RA == 0}},
{3600, {-3600 + RA + RB == 0, 1 080 000 + 1000 RA == 0}},
{3900, {-3900 + RA + RB == 0, 1 170 000 + 1000 RA == 0}},
{4200, {-4200 + RA + RB == 0, 1 260 000 + 1000 RA == 0}},
{4500, {-4500 + RA + RB == 0, 1 350 000 + 1000 RA == 0}},
{4800, {-4800 + RA + RB == 0, 1 440 000 + 1000 RA == 0}},
{5100, {-5100 + RA + RB == 0, 1 530 000 + 1000 RA == 0}},
{5400, {-5400 + RA + RB == 0, 1 620 000 + 1000 RA == 0}},
{5700, {-5700 + RA + RB == 0, 1 710 000 + 1000 RA == 0}},
{6000, {-6000 + RA + RB == 0, 1 800 000 + 1000 RA == 0}}

```

Vyřešené rovnice:

```

vysl = Table[{res[[1]], Solve[res[[2]], {RA, RB}]}, {res, rovnice}]
{{0, {{RA → 0, RB → 0}}}, {300, {{RA → -90, RB → 390}}}, {600, {{RA → -180, RB → 780}}},
{900, {{RA → -270, RB → 1170}}}, {1200, {{RA → -360, RB → 1560}}},
{1500, {{RA → -450, RB → 1950}}}, {1800, {{RA → -540, RB → 2340}}},
{2100, {{RA → -630, RB → 2730}}}, {2400, {{RA → -720, RB → 3120}}},
{2700, {{RA → -810, RB → 3510}}}, {3000, {{RA → -900, RB → 3900}}},
{3300, {{RA → -990, RB → 4290}}}, {3600, {{RA → -1080, RB → 4680}}},
{3900, {{RA → -1170, RB → 5070}}}, {4200, {{RA → -1260, RB → 5460}}},
{4500, {{RA → -1350, RB → 5850}}}, {4800, {{RA → -1440, RB → 6240}}},
{5100, {{RA → -1530, RB → 6630}}}, {5400, {{RA → -1620, RB → 7020}}},
{5700, {{RA → -1710, RB → 7410}}}, {6000, {{RA → -1800, RB → 7800}}}}

```

Výsledné reakce :

```
vysl // TableForm
```

```
0      RA → 0  RB → 0
300    RA → -90 RB → 390
600    RA → -180 RB → 780
900    RA → -270 RB → 1170
1200   RA → -360 RB → 1560
1500   RA → -450 RB → 1950
1800   RA → -540 RB → 2340
2100   RA → -630 RB → 2730
2400   RA → -720 RB → 3120
2700   RA → -810 RB → 3510
3000   RA → -900 RB → 3900
3300   RA → -990 RB → 4290
3600   RA → -1080 RB → 4680
3900   RA → -1170 RB → 5070
4200   RA → -1260 RB → 5460
4500   RA → -1350 RB → 5850
4800   RA → -1440 RB → 6240
5100   RA → -1530 RB → 6630
5400   RA → -1620 RB → 7020
5700   RA → -1710 RB → 7410
6000   RA → -1800 RB → 7800
```

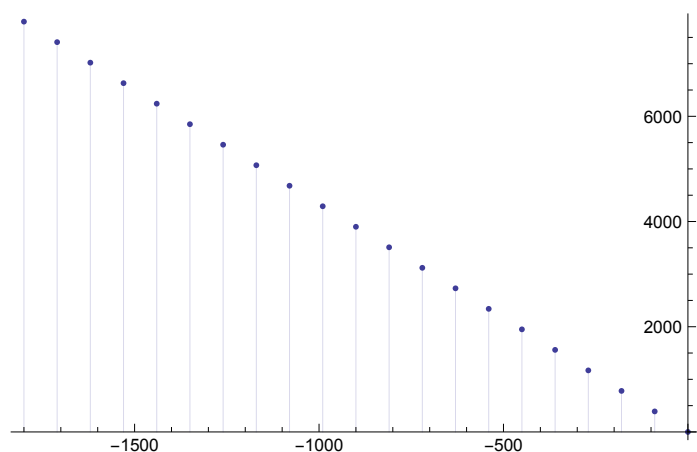
Nyní jsme získali velikosti reakčních sil pro všechny změny zatížení. A tuto závislost sestavíme do grafu.

Body pro graf:

```
body = (Tooltip[{RA, RB} /. (#[[2]] // First), #[[1]] // ToString]) & @ vysl
{{0, 0}, {-90, 390}, {-180, 780}, {-270, 1170}, {-360, 1560}, {-450, 1950},
{-540, 2340}, {-630, 2730}, {-720, 3120}, {-810, 3510}, {-900, 3900},
{-990, 4290}, {-1080, 4680}, {-1170, 5070}, {-1260, 5460}, {-1350, 5850},
{-1440, 6240}, {-1530, 6630}, {-1620, 7020}, {-1710, 7410}, {-1800, 7800}}
```

Znázornění změny průběhu reakcí v grafu:

```
ListPlot[body, AxesOrigin → {0, 0}, Filling → Axis]
```

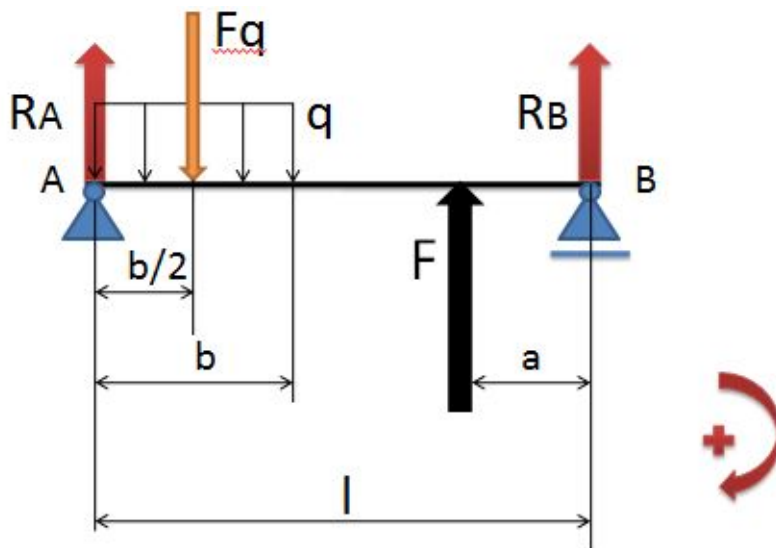
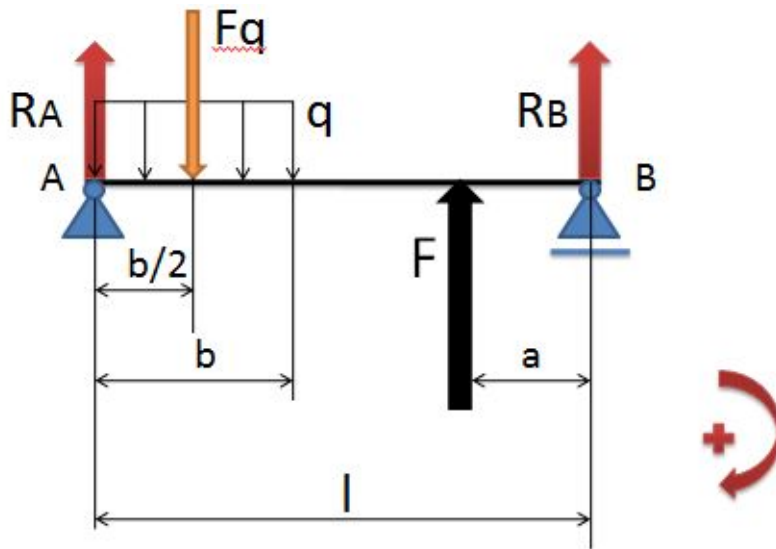


Jak vidíme, závislost reakcí jest lineární a podle grafu si můžeme odečíst reakce pro libovolné zatížení.

Příklad č. 2

Vypočítejte velikost reakčních sil v uložení podle obrázku, je - li nosník zatížen spojitým zatížením o

velikosti $q = 20 \text{ N/mm}$ a osamělou silou $F = 850 \text{ N}$. Rozměry nosníku jsou : $b = 650 \text{ mm}$, $a = 370 \text{ mm}$, $l = 1140 \text{ mm}$.



Statické rovnice rovnováhy :

$$\sum F_x = 0$$

$$\sum F_y = 0; R_A - F_q + F + R_B = 0$$

$$\sum M_A = 0; F_s \cdot b / 2 - F \cdot [l - a] - R_B \cdot l = 0$$

Nejdříve určíme velikost F_s :

`Solve [Fs == q b , Fs]`

`{{1500 Ns -> b q}}`

`{{Fs -> 13 000}}`

`ClearAll[b, q]`

$q = 20; b = 650$

650

$\text{Solve}\left[\left\{q b \frac{b}{2} - F \{1 - a\} - R_B l == 0, R_A - q b + F + R_B == 0\right\}, \{R_A, R_B\}\right]$

$\{\{R_A \rightarrow 8775 - 450 N, R_B \rightarrow 4225 - 1050 N\}\}$

Výsledné reakce :

$\left\{\left\{R_A \rightarrow \frac{514\,025}{57}, R_B \rightarrow \frac{178\,525}{57}\right\}\right\}$

`ClearAll[a, b, F, q]`

$q = 20; b = 650; a = 370; l = 1140; F = 850$

850

Tak a teď v desetinných číslech :

$\text{NSolve}\left[\left\{q b \frac{b}{2} - F \{1 - a\} - R_B l == 0, R_A - q b + F + R_B == 0\right\}, \{R_A, R_B\}\right]$

$\{\{R_A \rightarrow 9017.98, R_B \rightarrow 3132.02\}\}$

$\{\{R_A \rightarrow 9017.982456140351, R_B \rightarrow 3132.0175438596493\}\}$

Opět si ukážeme, k jaké změně dojde bude-li se měnit spojitě zatížení v rozsahu: $q = 1$ N/mm až do 36 N/mm v krocích po 6 N/mm.

$l = 1140; a = 370; b = 650; F = 850; qtab = \text{Table}[n, \{n, 1, 36, 6\}]$

$\{1, 7, 13, 19, 25, 31\}$

Sestavení rovnic :

$\text{rovnice} = \text{Table}\left[\left\{q, \left\{q b \frac{b}{2} - F \{1 - a\} - R_B l == 0, R_A - q b + F + R_B == 0\right\}\right\}, \{q, qtab\}\right]$

$\{\{1, \{-443\,250 - 1140 R_B\} == 0, 200 + R_A + R_B == 0\}\},$
 $\{7, \{824\,250 - 1140 R_B\} == 0, -3700 + R_A + R_B == 0\}\},$
 $\{13, \{2\,091\,750 - 1140 R_B\} == 0, -7600 + R_A + R_B == 0\}\},$
 $\{19, \{3\,359\,250 - 1140 R_B\} == 0, -11\,500 + R_A + R_B == 0\}\},$
 $\{25, \{4\,626\,750 - 1140 R_B\} == 0, -15\,400 + R_A + R_B == 0\}\},$
 $\{31, \{5\,894\,250 - 1140 R_B\} == 0, -19\,300 + R_A + R_B == 0\}\}\}$

Vyřešené rovnice :

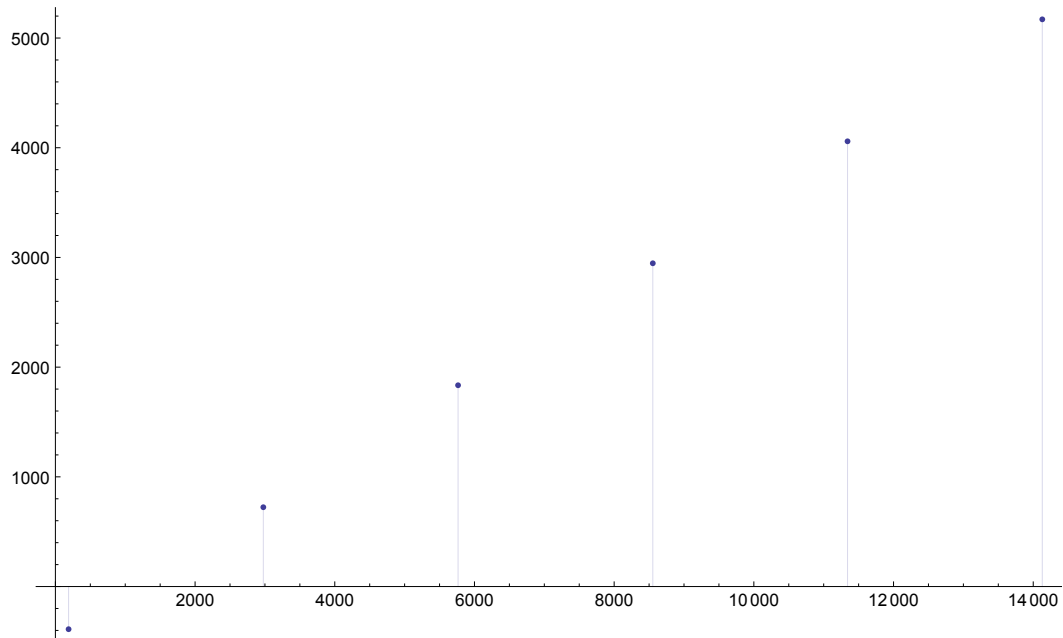
$\text{reseni} = \text{Table}[\{\text{res}[[1]], \text{NSolve}[\text{res}[[2]], \{R_A, R_B\}]\}, \{\text{res}, \text{rovnice}\}]$

$\{\{1, \{R_A \rightarrow 188.816, R_B \rightarrow -388.816\}\}\}, \{7, \{R_A \rightarrow 2976.97, R_B \rightarrow 723.026\}\}\},$
 $\{13, \{R_A \rightarrow 5765.13, R_B \rightarrow 1834.87\}\}\}, \{19, \{R_A \rightarrow 8553.29, R_B \rightarrow 2946.71\}\}\},$
 $\{25, \{R_A \rightarrow 11\,341.4, R_B \rightarrow 4058.55\}\}\}, \{31, \{R_A \rightarrow 14\,129.6, R_B \rightarrow 5170.39\}\}\}\}$

Znázornění průběhu reakčních sil v grafu:

```
body = Tooltip[{ {RA, RB} /. (#[[2]] // First), #[[1]] // ToString} & /@ reseni
{{188.816, -388.816}, {2976.97, 723.026}, {5765.13, 1834.87},
{8553.29, 2946.71}, {11341.4, 4058.55}, {14129.6, 5170.39}}
```

```
ListPlot[body, AxesOrigin -> {0, 0}, Filling -> Axis]
```



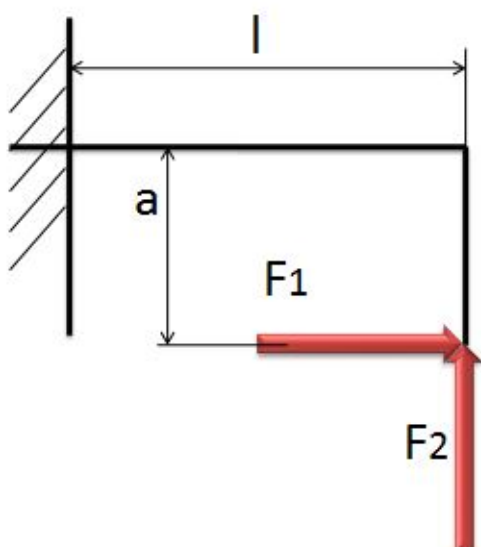
Jak vidíme průběh je opět lineární.

Závěr:

Je zřejmé, že při využití rovnic rovnováhy je řešení velmi jednoduché a nejvíc nám dá zabrat sestavení správných příkazů pro WM. Závislost reakcí na osamělých silách je vždy lineární.

Příklad k procvičení:

Vypočtete velikost reakcí na lomeném nosníku podle obr. zatíženého silami $F_1 = 550$ N a $F_2 = 1680$ N, rozměry nosníku jsou: $l = 950$ mm, $a = 280$ mm. Dále zjistěte, jak se budou tyto reakce měnit, budeli síla F_2 růst od 0 N do 1680 N v krocích po 80 N. Průběh můžete vynést v grafu.



Zdroje

Mechanika Statika I - S. Salaba a A. Matěna SNTL Praha 1977